



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - 26. 02. 2017

Clasa a XI- a

- 1) a) Să se calculeze determinantul de ordin n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

- b) Să se demonstreze că dacă o matrice pătratică de ordinul n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ este formată cu elemente egale fiecăre cu 1 sau -1 atunci determinantul său se divide cu 2^{n-1} .

- 2) Fie $n \geq 2$ un număr natural. Să se determine toate matricele $A \in M_n(\mathbb{C})$ cu $A^{2017} = -I_n$ pentru care există $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ care comută și verifică $X + Y = I_n$, $AX = X^2$ și $AY = -Y^2$.

- 3) Determinați numerele reale $a \geq 0$ și b pentru care $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - x \right)^{\frac{bx^2 + x}{x+1}} = e$.

- 4) Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$.

Dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1 + a_n}{2} \leq a_{2n} \leq \frac{1 + a_{n+1}}{2}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Să se dea un exemplu de șir cu proprietatea menționată.

1 Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

2 Toate problemele sunt obligatorii;

3 Fiecare problemă se notează de la 0 la 7